ECOLE NATIONALE SUPERIEURE
DES TECHNIQUES INDUSTRIELLES ET
DES MINES DE DOUAI

CONCOURS D'ADMISSION 1991

MATHEMATIQUES

(Temps accordé : 4 heures)

L'épreuve se compose de quatre exercices indépendants.

PREMIER EXERCICE

On considère, sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \qquad y' \left(1 + x^2 \right) = 1 + 3xy \quad .$$

1/ Démontrer que les solutions réelles de $(\mathcal{E})$ sont les fonctions f_λ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_\lambda(x) = P(x) + \lambda \left(1 + x^2 \right)^r$,
où λ est un nombre réel, r un nombre rationnel à préciser et P une fonction polynôme à expliciter .

2/ Montrer qu'il existe une et une seule fonction g , solution de $(\mathcal{E})$, qui admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

3/ Calculer la dérivée g' de g et étudier son signe .

4/ Déterminer, si elle existe, la limite de $\frac{g(x)}{x^3}$ quand x tend vers $-\infty$.

5/ Représenter graphiquement la fonction g .

A SUIVRE

DEUXIEME EXERCICE

Soit α un nombre réel et H la fonction réelle définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \ , \quad H(x) = \alpha \cos x + \sin x + 2 \ .$$

1/ Résoudre , en discutant selon α , l'équation : $H(x) = 0$

Dans la suite , on supposera que $|\alpha|$ *est strictement inférieur à* $\sqrt{3}$.

2/ Pour tout nombre réel z , on pose : $F(z) = \displaystyle\int_0^z \frac{dx}{H(x)}$.

a) Vérifier que l'on définit bien ainsi une application F continue sur $\mathbb{R}$.

b) Pour tout élément z de l'intervalle $[\,0,\ \pi\,[$, exprimer $F(z)$.

3/ Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\alpha \cos x + \sin x + 2}$.

TROISIEME EXERCICE

Pour cet exercice , il est conseillé de faire une figure claire et précise . Liberté est laissée au candidat quant aux méthodes utilisées (choix d'un repère, propriétés des barycentres, calculs vectoriels, etc...).

On se place dans l'espace affine habituel $\mathcal{E}$ de dimension 3 .

Soient A , B , C et D quatre points non coplanaires de $\mathcal{E}$ définissant un tétraèdre $[ABCD]$. On appelle I , J et K les isobarycentres respectifs des triplets (A,B,C) , (B,C,D) et (D,A,B) et on appelle Π le plan contenant les points I , J et K .

1/ Démontrer que les droites (IK) et (CD) sont parallèles .

2/ Démontrer que le plan Π et le plan $\mathcal{P}$, défini par les points A , C et D , sont parallèles .

3/ Démontrer que le plan Π et le plan Q, défini par les points B, C et D , sont sécants et préciser leur intersection .

4/ En déduire la détermination et la construction de la section du tétraèdre $[ABCD]$ par le plan Π .

5/ Soit G l'isobarycentre du triplet (I,J,K) . Démontrer que la droite (BG) passe par L , isobarycentre du triplet (A,C,D) .

Tournez la page S.V.P.

QUATRIEME EXERCICE

Dans tout l'exercice , m et n sont deux nombres entiers strictement positifs vérifiant $m \geq n$, A est une matrice à m lignes et n colonnes , à coefficients réels , et B est un élément de $\mathbb{R}^m$. On identifie un élément de $\mathbb{R}^m$ (ou de $\mathbb{R}^n$) et la matrice unicolonne associée ; on note ${}^tM$ la matrice transposée de la matrice M . On pose , pour tout Z de $\mathbb{R}^m$, $\| Z \|^2 = {}^tZ\,Z$.

1/ Vérifier que :

$$\forall\ (Z_1, Z_2) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \ , \quad \| Z_1 + Z_2 \|^2 = \| Z_1 \|^2 + \| Z_2 \|^2 + 2\ {}^tZ_1\,Z_2 \ .$$

On considère la partie $E = \{ \| A\,X - B \|^2,\ X \in \mathbb{R}^n \}$ de $\mathbb{R}$ et on pose $K = \mathrm{Inf}(E)$

2/ Justifier l'existence de K .

On considère maintenant le système linéaire : $(\mathcal{S})$ $\quad A\,X = B$.

On appelle pseudo-solution de $(\mathcal{S})$ tout élément Y de $\mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\| A\,Y - B \|^2 = K \ .$$

3/ Montrer que si $(\mathcal{S})$ admet une solution , les pseudo-solutions de $(\mathcal{S})$ sont les solutions de $(\mathcal{S})$.

On associe à $(\mathcal{S})$ le système : $(\mathcal{S}')$ $\quad {}^tA\,A\,X = {}^tA\,B$.

4/ Montrer qu'un élément Y de $\mathbb{R}^n$ est pseudo-solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement s'il est solution de $(\mathcal{S}')$.
Indication : on pourra écrire $A\,X - B = A\,(X - Y) + (A\,Y - B)$.

5/ a) On désigne par O_m et O_n les matrices unicolonnes nulles comportant respectivement m lignes et n lignes .

Prouver l'équivalence : $(A\,X = O_m) \Leftrightarrow ({}^tA\,A\,X = O_n)$.

b) En déduire l'égalité : rang de A = rang de $({}^tA\,A)$.

6/ Montrer que , si A est de rang n , $(\mathcal{S})$ admet une et une seule pseudo-solution .

7/ On considère , à titre d'exemple , le système $(\mathcal{S})$ suivant :

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} \alpha - \beta = -0{,}9 \\ \alpha + \beta = 3{,}2 \\ \alpha = 1{,}1 \\ 2\alpha + \beta = 4{,}1 \end{cases}$$

Déterminer les pseudo-solutions de $(\mathcal{S})$.

FIN